Koppel- und Besteckrechnung

Koppelrechnung bedeutet von einer gegebenen Position mit einem bestimmten Kurs und Distanz eine Zielposition zu bestimmen.

Gegeben sind: φ_A, λ_A, α (Kurs) und d (Distanz)

Gesucht sind: φ_B und λ_B

Besteckrechnung bedeutet die Differenz zwischen zwei Positionen als Entfernung und Kurs zu ermitteln.

Gegeben sind: φ_A, λ_A, φ_B und λ_B

Gesucht sind: α (Kurs) und d (Distanz)

Prinzipiell sind beide obigen Aufgabenstellungen loxodromisch oder orthodromisch berechenbar.

Loxodromisch bedeutet mit konstantem Kurs aber nicht die kürzeste Strecke auf der Erdkugel zu nutzen. Bei kürzeren Entfernungen (< 100sm) wird mit „Mittelbreite“ sonst mit „vergrößerter Breite“ gerechnet.

Orthodromisch ist die Nutzung der Großkreise. Diese Methoden sind etwas aufwändiger, können aber prinzipiell sowohl bei kurzen als auch bei langen Entfernungen herangezogen werden. Ein moderner Kartenplotter würde grundsätzlich orthodromisch rechnen. Der Kurs wird während der Reise regelmäßig geändert.

In der Praxis und somit auch in der SHS-Navigationsprüfung ergeben sich jedoch (nur) vier sinnvolle Fragestellungen:

1. Koppelrechnung (loxodromisch) nach Mittelbreite
2. Besteckrechnung (loxodromisch) nach Mittelbreite
3. Besteckrechnung (loxodromisch) nach vergrößerter Breite
4. Besteckrechnung (orthodromisch)

Für alle vier Fragestellungen sind die notwendigen Formelgrundlagen u.a. in der Formelsammlung im SSS-SHS-Begleitheft abgedruckt. Die direkt nutzbaren Formeln müssen jedoch für die jeweilige Fragestellung individuell zusammengestellt werden.

Im Folgenden werden diese Zusammenstellungen aufgezeigt.

1. Koppelrechnung loxodromisch für kürzere Entfernungen mit Mittelbreite

Diese Aufgabenstellung ergibt sich z.B. in den Astroaufgabe zur Bestimmung des zweiten Koppelortes bei der Versegelung zwischen zwei Gestirnsbeobachtungen.

Gegeben sind: φ_A, λ_A, α (Kurs) und d (Distanz)   Gesucht sind: φ_B und λ_B

Laut SSS/SHS-Begleitheft, die für diese Fragestellung notwendigen Formeln:

3.1 Begriffe und Definitionen

Breitenunterschied $\Delta\varphi$:	$\varphi_B - \varphi_A$	
Längenunterschied $\Delta\lambda$:	$\lambda_B - \lambda_A$	
Breitendistanz b:	b [sm] $\equiv \Delta\varphi$ [']	b in Seemeilen entspricht $\Delta\varphi$ in Winkelminuten
Äquatormeridiandistanz ℓ:	ℓ [sm] $\equiv \Delta\lambda$ [']	ℓ in Seemeilen entspricht $\Delta\lambda$ in Winkelminuten

3.2 Koppel- und Besteckrechnung nach Mittelbreite (In der Formelsammlung fehlt: „Koppel- und…“ im Titel)

Mittlere Breite φ_M:	$\varphi_M = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_A + \varphi_B)$
Breitendistanz b:	$b = d \cdot \cos\alpha$
Äquatormeridiandistanz ℓ:	$\ell = \frac{a}{\cos\varphi_M}$
Abweitung a:	$a = d \cdot \sin\alpha$
Kurs α:	$\tan\alpha_r = \frac{\ell}{b} \cdot \cos\varphi_M$
Distanz d:	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
Bestimmungsort:	$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi$ $\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda$

α_r = viertelkreisig

Aus viertelkreisigem α_r wird vollkreisiges α:

Kurs	$\alpha_r > 0$	$\alpha_r < 0$
Ost	$\alpha = \alpha_r$	$\alpha = \alpha_r + 180°$
West	$\alpha = \alpha_r + 180°$	$\alpha = \alpha_r + 360°$

Aus obigen Formeln müssen jetzt die notwendigen in sinnvoller Reihenfolge genutzt werden:

Mit Beispiel: φ_A: 24°17,5′ N, λ_A: 038°20,6′ W, α: 240°, d = 70 sm

Schritt	Formel	Beispielrechnung	
1.	$b = d \cdot \cos\alpha \equiv \Delta\varphi$	b = 70′ · cos 240° = -35′	Hinweis: b in ′ jedoch φ_B in °
2.	$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi$	φ_B = 24°17,5′ + (-0°35′) = +23°42,5′ = 23°42,5′ N = φ_B	
3.	$\varphi_M = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_A + \varphi_B)$	φ_M = ½ · (24°17,5′ + 23°42,5′) = 24°00,0′	
4.	a in Formel für ℓ eingesetzt: $\ell = \frac{d \cdot \sin\alpha}{\cos\varphi_M} \equiv \Delta\lambda$	$\ell = \frac{70' \cdot \sin 240°}{\cos 24°} \approx$ -66,4′	Hinweis: ℓ in ′ jedoch λ_B in °
5.	$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda$	λ_B = -038°20,6′ + (-0°66,4′) = -39°27,0′ = 039°27,0′ W = λ_B	

Mit Ergebnis: Zielposition: φ_B = 23°42,5′ N, λ_B = 039°27,0′ W

2. Besteckrechnung loxodromisch für kürzere Entfernungen mit Mittelbreite

Diese Aufgabenstellung ergibt sich z.B. bei Navigation in Küstennähe.

Gegeben sind: φ_A, λ_A, φ_B und λ_B Gesucht sind: α (Kurs) und d (Distanz)

Es dienen die gleichen Formelgrundlagen wie bei der loxodromischen Koppelrechnung der Vorseite.

Aus diesen Formeln müssen wieder die notwendigen in sinnvoller Reihenfolge genutzt werden:

Mit Beispiel: φ_A: 24°17,5′ N, λ_A: 038°20,6′ W, φ_B = 23°42,5′ N, λ_B = 039°27,0′ W

Schritt	Formel	Beispielrechnung
1.	$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A \equiv b$	b = 23°42,5′ - 24°17,5′ = - 0°35,0′
2.	$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A \equiv \boldsymbol{\ell}$	$\boldsymbol{\ell}$ = (-039°27,0′) – (-038°20,6′) = -1°06,4′
3.	$\varphi_M = ½ \cdot (\varphi_A + \varphi_B)$	φ_M = ½ · (-24°17,5′ + -23°42,5′) = -24°00,0′
4.	$a = \boldsymbol{\ell} \cdot \cos \varphi_M$	a = -1°06,4′· cos -24° = -1°00,65′
5.	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$	$d = \sqrt{(-1°00{,}7')^2 + (-0°35{,}0')^2} \approx$ 1°10′ = 70′ = 70sm
6.	$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{l}{b} \cdot \cos \varphi_M\right)$	$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{-1°6{,}4'}{-0°35'} \cdot \cos(-24°)\right) \approx 60°$
7.	Aus viertel- α_r wird vollkreisiges α:	α_r > 0 und Kurs West. Daher: α = 60° + 180° = 240° = α

Kurs	$\alpha_r > 0$	$\alpha_r < 0$
Ost	$\alpha = \alpha_r$	$\alpha = \alpha_r + 180°$
West	$\alpha = \alpha_r + 180°$	$\alpha = \alpha_r + 360°$

Mit Endergebnis: Distanz = 70sm; Kurs = 240°

3. Besteckrechnung loxodromisch für größere Entfernungen mit vergrößerter Breite

Diese Aufgabenstellung ergibt sich bei Langfahrtplanung.

Gegeben sind: φ_A, λ_A, φ_B und λ_B Gesucht sind: α (Kurs) und d (Distanz)

Laut SSS/SHS-Begleitheft, die für diese Fragestellung notwendigen Formeln:

3.3 Besteckrechnung nach vergrößerter Breite

$$\Delta\Phi = \frac{10800'}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)}\right)$$

$$\tan\alpha_r = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\Phi}$$

$$d = \left|\frac{b}{\cos\alpha}\right|$$

Aus obigen Formeln müssen jetzt die notwendigen in sinnvoller Reihenfolge genutzt werden:

Mit Beispiel: φ_A: 40° N, λ_A: 071° W, φ_B = 50° N, λ_B = 005° W

Schritt	Formel	Beispielrechnung
1.	$\Delta\Phi = \frac{10800'}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)}\right)$	$\Delta\Phi = \frac{10800'}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{50°}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{40°}{2}\right)}\right)$ = 851,78′ ≈ 852′ = 14°12′
2.	$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\Phi}\right)$	$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{(-5°) - (-71)°}{14°12'}\right)$ = 77,9° ≈ 78°
3.	Aus vierte- α_r wird vollkreisiges α:	α_r > 0 und Kurs Ost. Daher: $\alpha_r = \alpha$ = 78°

Kurs	$\alpha_r > 0$	$\alpha_r < 0$
Ost	$\alpha = \alpha_r$	$\alpha = \alpha_r + 180°$
West	$\alpha = \alpha_r + 180°$	$\alpha = \alpha_r + 360°$

Schritt	Formel	Beispielrechnung
4.	$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi \quad b \equiv \Delta\varphi$	b = 50° - 40° = 10° = 600′
5.	$d = \left\|\frac{b}{\cos\alpha}\right\|$	$d = \left\|\frac{600'}{\cos 78°}\right\|$ = 2885,8′ ≈ 2886sm = d

Mit Endergebnis: Distanz$_{lox}$ = 2886 sm; Kurs = 078°

4. Besteckrechnung orthodromisch für sehr große Entfernungen

Diese Aufgabenstellung ergibt sich bei Langfahrtplanung.

Gegeben: φ_A, λ_A, φ_B und λ_B Gesucht: α_{Start}, α_{Ziel} (Start-, Ziel-Kurs) und d (Distanz)

Laut SSS/SHS-Begleitheft, die für diese Fragestellung notwendigen Formeln:

3.4 Großkreisrechnung

3.4.1 Großkreisdistanz

$$\cos\delta = \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \cdot \cos\Delta\lambda$$

$$\mathrm{d} = \delta \cdot 60sm/°$$

3.4.2 Anfangskurs

$$\tan\alpha_r = \frac{\sin\Delta\lambda}{\tan\varphi_B \cdot \cos\varphi_A - \sin\varphi_A \cdot \cos\Delta\lambda}$$

Aus diesen Formeln müssen die notwendigen in sinnvoller Reihenfolge genutzt werden:

Mit Beispiel: φ_A: 40° N, λ_A: 071° W, φ_B = 50° N, λ_B = 005° W

Schritt	Formel	Beispielrechnung
1.	$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$	$\Delta\lambda$ = 066°
2.	$\delta = \cos^{-1}(\sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \cdot \cos\Delta\lambda)$	δ = 46°09,4′
3.	$\mathrm{d} = \delta \cdot 60\mathrm{sm}/°$	d = 2769,4sm
4.	$\alpha_r = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\Delta\lambda}{\tan\varphi_B \cdot \cos\varphi_A - \sin\varphi_A \cdot \cos\Delta\lambda}\right)$	α_r = 54,5°
5.	Aus α_r wird α:	$\alpha_r > 0$ und Ostkurs. Daher: $\alpha_r = \alpha \approx 55°$

Kurs	$\alpha_r > 0$	$\alpha_r < 0$
Ost	$\alpha = \alpha_r$	$\alpha = \alpha_r + 180°$
West	$\alpha = \alpha_r + 180°$	$\alpha = \alpha_r + 360°$

Mit Endergebnis: Distanz$_{Orth}$ ≈ 2769 sm; Start-Kurs ≈ 055°

Der Zielkurs wird dadurch bestimmt, dass die Koordinaten von Start und Ziel vertauscht in dieselbe Kursformel eingesetzt werden und am Ende der Gegenkurs mit +180° bestimmt wird.

Zusätzlich könnten die Kurse an beliebigen Stellen der Route berechnet werden, was aber in den SHS-Prüfungen seit Jahren nicht mehr verlangt wurde und daher hier nicht behandelt wird.